Bölüm 5

Olasılık ve Olasılık Dağılışları

Olasılık: Eşit sanşla meydana gelen n tane olaydan nA tanesi A olayı olsun. Bu durumda A olayının meydana gelme olasılığı;

$$P_{(A)} = \frac{n_A}{n}$$

olarak tanımlanabilir. Burada; $P_{(A)}$: A olayının olasılığını, $n_{(A)}$: A olayının meydana gelme sayısı, n: Toplam deneme sayısını göstermektedir.

Örnek: Bir oyun kağıdı destesinden rasgele alınan bir kartın birli gelme olasılığı nedir?
Çözüm: A olayı kartın birli olma durumunu göstersin (A≡"Birli"). Bir deste oyun kağıdında n=52 kart vardır. Ayrıca bu 52 kartın $n_{(A)}=4$ tanesi birlidir. Bu durumda rasgele alınan bir kartın birli gelme olasılığı;

$$P_{(A)} = \frac{n_A}{n} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

olur.

Bir olayın olasılığı

$$0 \leq P_{(A)} \leq 1$$

arasında değer alır.

Olay: Örnek uzayındaki elemanlar kümesi olay olarak tanımlanabilir. Gerçekleşmesi rasgele olan olaya ise rasgele (şansa bağlı) olay denir.

Olaylar genelde iki gruba ayrılırlar:

-Birbirini Engelleyen Olaylar: Yapılan bir deneme sonunda meydana gelen bir olay, diğerlerinin aynı anda meydana gelmesini engelliyorsa, bu tip olaylara birbirini engelleyen olaylar denir. Örneğin A ve B gibi iki olay birbirini engelleyen olaylar ise $A \cap B = \emptyset$.

Örneğin, atılan bir parada yazı(Y) gelmesi, tura (T) gelmesini; atılan bir zarda bir gelmesi , diğer sayıların gelmesini engeller. Benzer şekilde, çekilen bir kartın kız gelmesi olayı, papaz gelmesini engeller. İşte bu tip olaylara birbirini engelleyen olaylar denir.

- <u>Bir Arada Meydana Gelebilen (Birbirini Engellemeyen) Olaylar</u>: Bu tip olaylarda birinin meydana gelmiş olması diğerlerinin meydana gelmesi engellemez. Örneğin , bir zar bir parayla birlikte atıldığında, zarda tek sayı gelmesi parada yazı gelmesini engellemez, bunun terside doğrudur. Canlılarda birçok özellikler aynı anda bulunabilir. Örneğin, bir bitki hem çok yıllık, hem kazık köklü ve hem de dar yapraklı olabilir.

Bir arada meydana gelebilen olaylar bağımlı ve bağımsız diye ikiye ayrılır. iki olaydan birinin gelmiş veya gelmemiş olması diğerinin meydana gelmesini veya gelmemesini etkiliyorsa bu iki olay istatistik bakımdan <u>bağımlıdır</u> denir.

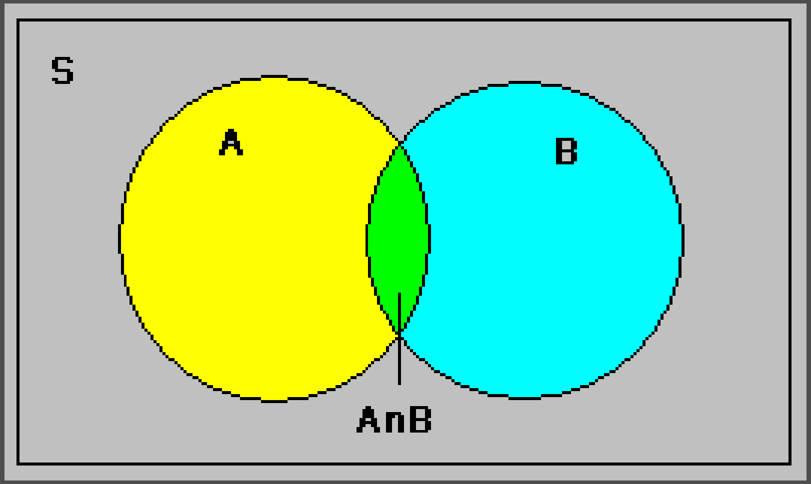
Olasılık Kuralları:

Değişik özellikteki birden fazla olay bir arada incelenmesi söz konusu olduğunda bu olayların meydana gelme olasılıklarının bulunması, istatistikte çok önemli olan değişik kurallar kullanılarak işlemlerin yapılmasını gerektirir.

Toplama Kuralı

Toplama kuralını, A ve B gibi iki olayın birbirleri ile olan durumlarına göre iki alt grupta incelenebilir.

Eğer A ve B olayları birbirini engellemeyen (veya bir arada meydana gelebilen) olaylar ise,



P(A veya B) = P(A)+P(B)-P(A ve B)

$$= \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} - \frac{n(AveB)}{n}$$

Örnek: Bir oyun kağıdı destesinden rasgele çekilen bir kartın kupa veya birli gelme olasılığı ne olur?

Çözüm:
A≡"Kupa", B≡"Birli" ise , n(A)=13, n(B)=4 ve n(AnB)=1 olur, bu durumda,

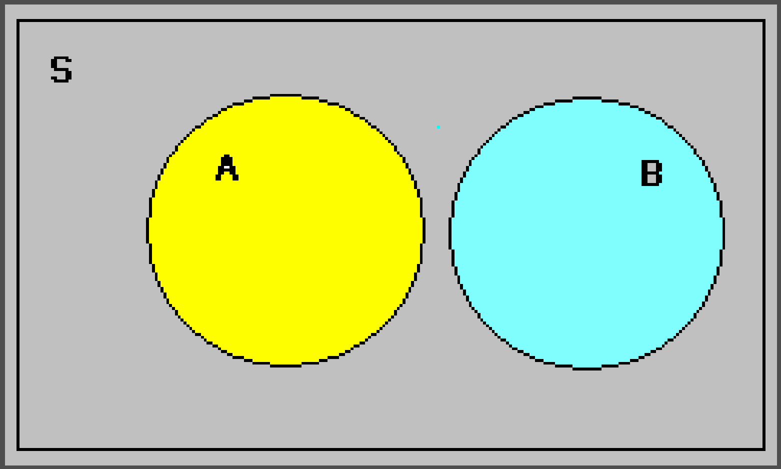
P(A veya B) = P(A)+P(B)-P(A ve B)

$$= \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} - \frac{n(AveB)}{n}$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

olur.

Eğer A ve B olayları birbirini engelleyen (ayrık) olaylar ise,



$$P(A \text{ veya } B) = P(A)+P(B)$$

$$= \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n}$$

Örnek: Bir oyun kağıdı destesinden rasgele çekilen bir kartın kupa veya sinek olma olasılığı ne olur?

Çözüm:
A≡"Kupa", B≡"Sinek" ise , n(A)=13, n(B)=13 olur, bu durumda,

$$P(AveyaB) = P(A) + P(B) = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{1}{2}$$

olur.

Çarpma Kuralı

A ve B gibi iki olay birbirlerinden bağımsız olaylar olsunlar. Bu durumda,

P(A ve B) = P(A) . P(B)

$$= \frac{n(A)}{n} . \frac{n(B)}{n}$$

Örnek: Bir zar ile bir madeni para birlikte atıldığında zarda çift sayı ve parada yazı gelme olasılığı ne olur?

Çözüm:
A≡"Zarda çift sayı", B≡"parada yazı" ise , n(A)=3, n(B)=1 olur, bu durumda,

P(A ve B) = P(A) . P(B)

$$= \frac{n(A)}{n} . \frac{n(B)}{n} \quad = \frac{3}{6} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

olur.

Olasılık Dağılışları (Populasyon Dağılışları):

Populasyon dağılışlarının şekli incelenen değişkenin gösterdiği özelliğe bağlıdır. Değişken kesikli ise populasyon (olasılık) dağılışı da kesiklidir. Değişken sürekli ise bu özelliğe ait olasılık dağılışı da sürekli olacaktır.

Kesikli Olasılık Dağılışları

- Bernoulli dağılışı
- Binom Dağılışı
- Geometrik Dağılış
- Negatif Binom Dağılışı
- Hipergeometrik Dağılış
- Poisson Dağılışı

Sürekli Olasılık Dağılışları

- Uniform Dağılış
- Normal Dağılış
- Standart Normal Dağılış
- Gama Dağılışı
- Beta Dağılışı
- t Dağılışı
- z Dağılışı
- Khi-Kare Dağılışı
- F Dağılışı

R kesikli bir şans değişkeni ve P(R=r)=P(r) ise kesikli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun kesikli bir olasılık fonksiyonu olabilmesi için;

1- P(r)≥0, tüm r değerleri için,

2- $\sum_{r=0}^{\infty} P(r) = 1$ (verilen r aralığında)

X sürekli bir şans değişkeni ve f(x) ise sürekli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun bir yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için;

1- f(x)≥0, tüm x değerleri için,

2- $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a) = 1$ br², a-b aralığında

koşullarını sağlaması gerekir.

Kesikli Olasılık Dağılışları

Binom Dağılışı:

Herhangi bir R kesikli şans değişkeninin Binom şans değişkeni olabilmesi için aşağıdaki koşulları taşıması gerekir.

1. Denemenin istenen ve istenmeyen şeklinde iki sonucu vardır.
2. İstenen olayın olasılığı
   P(istenen)=p ve istenmeyen olayın olasılığı
   P(istenmeyen)=q

olup her denemede aynıdır.

3. p+q=1
4. Denemeler tekrarlanabilir, birbirlerinden bağımsız olup toplam deneme sayısı n sabittir.

Bu şartları taşıyan R şans değişkeni binom dağılışı gösterir ve $R=\{r_0,r_1,r_2,r_3,\ldots r_n\}=\{0,1,2,3,\ldots,n\}$ değerlerini alır.
Bu durumda R'nin bu n değerden herhangi birisini alma olasılığı $P(R=r)=P(r)$ şeklinde gösterilir ve

$$P(R=r)=P(r)=C_r^n p^r q^{n-r}, r=0,1,2,3,\ldots,n$$

şeklinde hesaplanır. Burada,

Binom Olayı Örnekleri

-Doğacak bir çocuğun erkek veya kız olması ,
-Rasgele seçilen bir kişinin sigara içip içmemesi,
-Atılan bir paranın yazı veya tura gelmesi,
-Bir soruya verilen evet veya hayır cevabı,
-Bir testin sonucunun pozitif (+) veya negatif (-) çıkması
-Atılan bir zarda tek sayı veya çift sayı gelmesi,
-Bir sınavda başarılı veya başarısız olunması

$$P(R=r)=P(r)=C_r^n p^r q^{n-r}, r=0,1,2,3,\ldots,n$$

Burada,
n: deneme sayısı,
r:istenen olay sayısı,
n-r: istenmeyen olay sayısı,
p: istenen olayın olasılığı,
q: istenmeyen olayın olasılığını,

$$C_r^n=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

P(r)≥0, tüm r değerleri için,

$$\sum_{r=0}^{n} P(R=r)=\sum_{r=0}^{n} P(r)=\sum_{r=0}^{n} C_r^n p^r q^{n-r}=(p+q)^n=1$$

Örnek: Üç çocuklu ailelerden rasgele alınan bir ailenin
a) Hiç erkek çocuğu olmaması olasılığı,
b) En az bir erkek çocuk olma olasılığı
c) En fazla iki erkek çocuk olma olasılığı,
d) 1-3 arasında erkek çocuk olma olasılığı,
e) Dağılışın ortalaması ve varyansı ne olur?

Çözüm: Bu soruda n=3, istenen olayın (bir çocuğun erkek olması) olasılığı p=0.5 olup, q=1-p=1-0.5=0.5volur. İstenen olay sayısı r=0,1,2,3 değerlerini alabilecektir. Buna göre,

a) P(R=0)=P(0)=?

Birinci yol:

$$P(R=0)=P(0)=C_0^3 p^0 q^{3-0}=1.(\frac{1}{2})^0.(\frac{1}{2})^3=1.1.\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

$$C_0^3=\frac{3!}{(3-0)!0!}=\frac{3.2.1}{3.2.1.1}=1$$

İkinci yol:

$$\sum_{r=0}^{n} P(R=r) = \sum_{r=0}^{n} P(r) = \sum_{r=0}^{n} C_r^n p^r q^{n-r} = (p+q)^n = 1$$ idi

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{1.2} p^{n-2}q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} p^{n-3}q^3 + \ldots + q^n$$

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3p^1.q^2 + q^3$$

P(R=3) P(R=2) P(R=1) P(R=0)

$$P(R=0) = P(0) = q^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$$

b) P(R≥1)=P(R=1)+P(R=2)+P(R=3)

$$\sum_{r=0}^{n} P(R=r) = \sum_{r=0}^{n} P(r) = \sum_{r=0}^{n} C_r^n p^r q^{n-r} = (p+q)^n = 1$$ idi

$$\sum_{r=0}^{3} P(r) = \mathrm{P(R=0)} + \mathrm{P(R=1)} + \mathrm{P(R=2)} + \mathrm{P(R=3)} = 1$$

$$\mathrm{P(R \geq 1) = 1 - \{P(R=0)\}}$$

$$\mathrm{P(R \geq 1) = 1 - \{q^3\} = 1 - (\frac{1}{2})^3} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

c) P(R≤2)=P(R=0)+P(R=1)+P(R=2)
=1-{P(R=3)}

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3p^1.q^2 + q^3$$

P(R=3) P(R=2) P(R=1) P(R=0)

$$P(R \le 2) = 1 - \{p^3\} = 1 - (\frac{1}{2})^3 = \frac{7}{8}$$

d) P(1<R<3)=P(R=2)

$$P(R=2) = 3p^2q = 3(\frac{1}{2})^2 \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

e) Ortalaması ve varyansı

$$\mu = np = 3.\frac{1}{2} = 1.5 \qquad \sigma^2 = npq = 3.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 0.75$$

Poisson Dağılışı:

Sürekli bir aralıkta meydana gelen olay sayısı , genel olarak poisson denemeleri olarak adlandırılır. Aralık ;zaman, uzunluk, alan ve hacim olabilir. Sözü edilen aralıkta meydana gelen olay sayısı 0, 1, 2, ... değerlerini alır.

Örnek:

-Bir sandık portakalda çürük portakal sayısı,
-Bir kumaşın metre başına ihtiva ettiği dokuma kusur sayısı ,
-Bir kg yonca tohumunda bulunan yabancı ot tohum sayısı ,

Binom dağılışında n çok büyük ve p çok küçük olduğu durumlarda binom dağılışı poisson dağılışına yaklaşır, yani

$$\lim_{n\to\infty} p(r) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}$$

Böylece poisson dağılışının olasılık fonksiyonu

$$P(r) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}, r = 0,1,2,...$$

Burada , r =0,1,2,.....olup istenen olay olasılığını , λ:ortalama olup

λ=np

ve burada da ,

p=istenen olayın olasılığını

n=deneme sayısını ,

e=2.71826 ‘e eşittir ve bir sabittir .

P(r) bir olasılık dağılış fonksiyonu olduğundan ,

P(r)≥0 ve

$$\sum_{r=0}^{\infty} p(r) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!} = 1$$

Poisson dağılışı tek parametreli bir dağılıştır ve dağılışın ortalaması ve varyansı eşittir. Yani;

$\lambda=\sigma^2=np$

Örnek: Her birinde 300 domates tohumu bulunan paketlerde çimlenme gücü olmayan domates tohumu oranının 0.01 olduğu bilinmektedir. Bu paketler arasından rasgele seçilen bir pakette ,

a)Hepsinin çimlenmesi ,

b)Yalnız bir tohumun çimlenmemesi,

c)En az iki tohumun çimlenmemesi ,

d)En fazla üç tohumun çimlenmemesi ,

e)İki ile beş tohum arasında tohumun çimlenmemesi olasılıklarını ve

f)Dağılışın ortalaması , varyansı ve standart sapmasını bulunuz .

Çözüm:

n=300, p=0.01 ise $\lambda=np=300*0.01=3$

$e^{-\lambda}=e^{-3}=2.7182^{-3}=0.0498$

a) P(R=0)=?

$$P(R=0)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!}=\frac{e^{-3}3^{r}}{r!}=\frac{0.0498*3^{0}}{0!}=0.0498$$

b) P(R=1)=?

$$P(R=1)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!}=\frac{e^{-3}3^{r}}{r!}=\frac{0.0498*3^{1}}{1!}=0.1494$$

c) P(R≥2)=?

$$\sum_{r=0}^{\infty}p(r)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!}=p(0)+p(1)+p(2)+\ldots+p(300)=1$$ idi

$$P(R\geq 2)=1-\{p(0)+p(1)\}$$

$$=1-\{0.0498+0.1494\}=0.8008$$

d) P(R≤3)=?

$$P(R \le 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3)$$

$$P(R = 2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!} = \frac{e^{-3}3^{2}}{2!} = \frac{0.0498 * 3^{2}}{2!} = 0.2241$$

$$P(R = 3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!} = \frac{e^{-3}3^{3}}{3!} = \frac{0.0498 * 3^{3}}{3!} = 0.2241$$

$$P(R \le 3) = 0.0498 + 0.1494 + 0.2241 + 0.2241 = 0.6474$$

d) P(2<R<5)=?

$$P(2 < R < 5) = p(3) + p(4)$$

d) P(2<R<5)=?

$$P(2 < R < 5) = p(3) + p(4)$$

$$P(R = 4) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!} = \frac{e^{-3}3^{4}}{4!} = \frac{0.0498 * 3^{4}}{4!} = 0.1681$$

$$P(2 < R < 5) = p(3) + p(4) = 0.2241 + 0.1681 = 0.3922$$

e) Dağılışın ortalaması ve varyansı birbirine eşit olup

$$\lambda = \mu = np = 300 * 0.01 = 3$$