Bölüm 6
Sürekli Olasılık Dağılışları

Doç.Dr. Suat ŞAHİNLER

X sürekli bir şans değişkeni ve f(x) ise sürekli bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun bir yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için;

1- $f(x) \geq 0$, tüm x değerleri için,

2- $$\int_a^b f(x)\,dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) = 1$$ br², a-b aralığında

koşullarını sağlaması gerekir.

Normal Dağılış:

Yoğunluk fonksiyonu

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}dx \qquad , \; 0<\sigma<\infty$$

$-\infty < \mu < \infty$

$-\infty < x < \infty$

Burada;

σ: populasyonun standart sapmasını,

μ: populasyon ortalamasını,

e=2.71826

π=3.1415

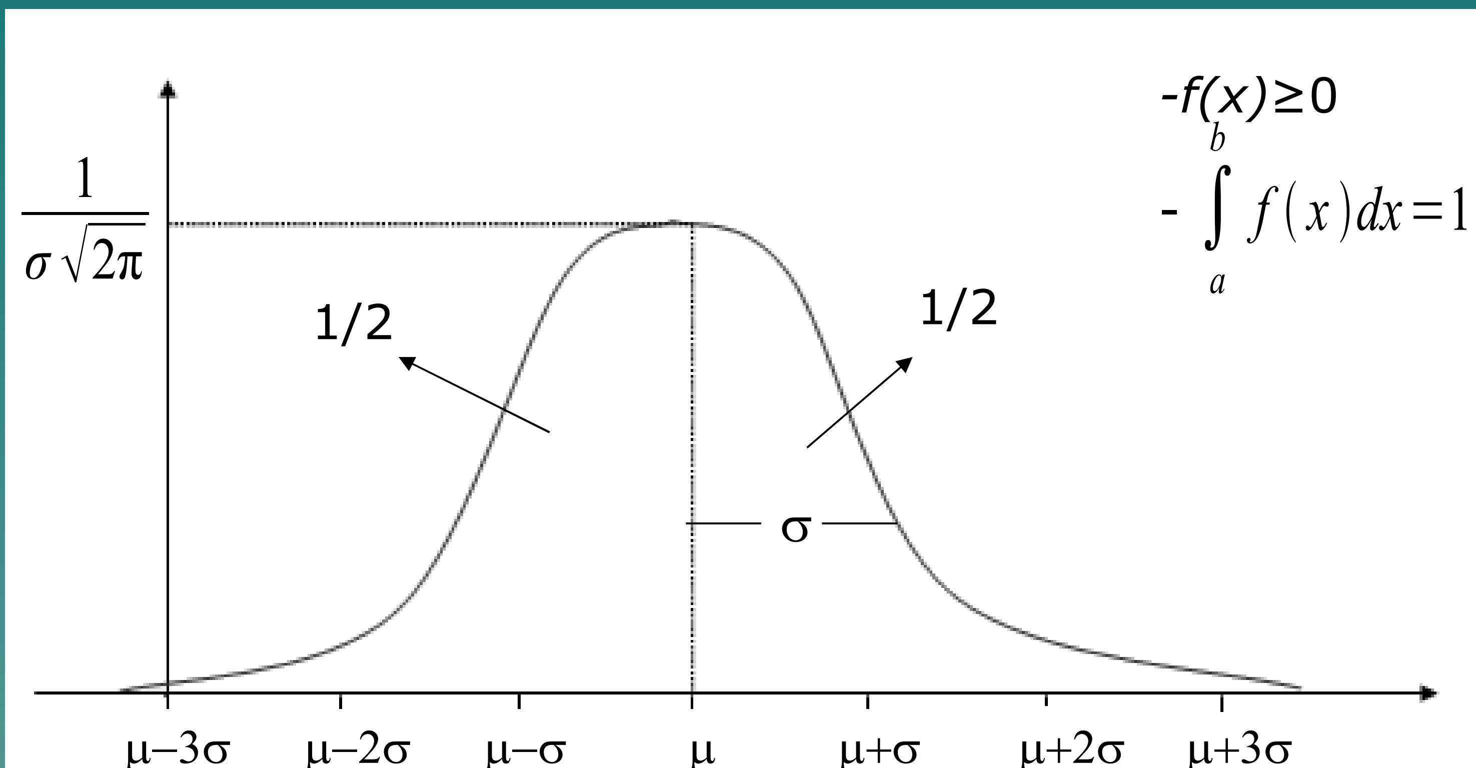
Bu fonksiyonun grafiği çizildiğinde

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

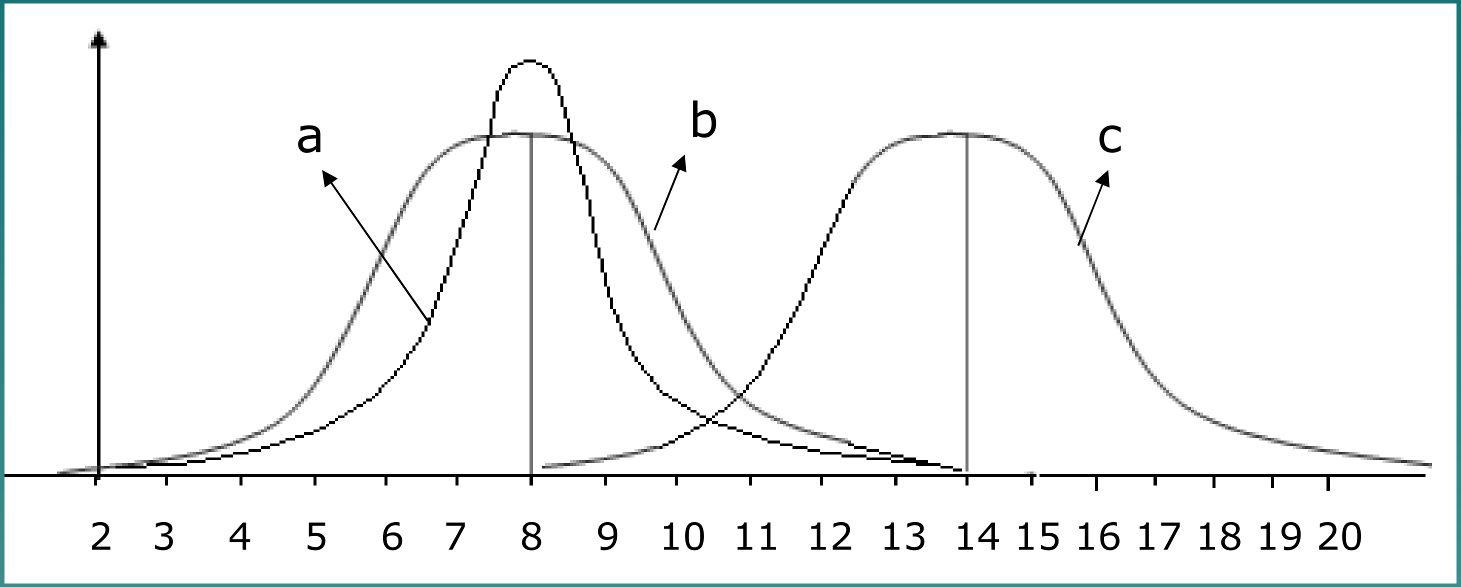
Grafiğin özellikleri

-Çan biçiminde

-μ'ye göre simetriktir



Normal dağılışın iki önemli parametresi vardır. Bunlar; dağılışın x ekseni üzerindeki yerini belirleyen μ, dağılışın şeklini belirleyen σ^2'dir. Bir diğer ifade ile fonksiyonda μ ve σ^2'nin değeri değiştikçe dağılışın x ekseni üzerindeki yeri ve şekli değişir.



Aşağıda verilen örnek dağılışları şekildeki hangi grafikte temsil edilebileceğini tartışınız..

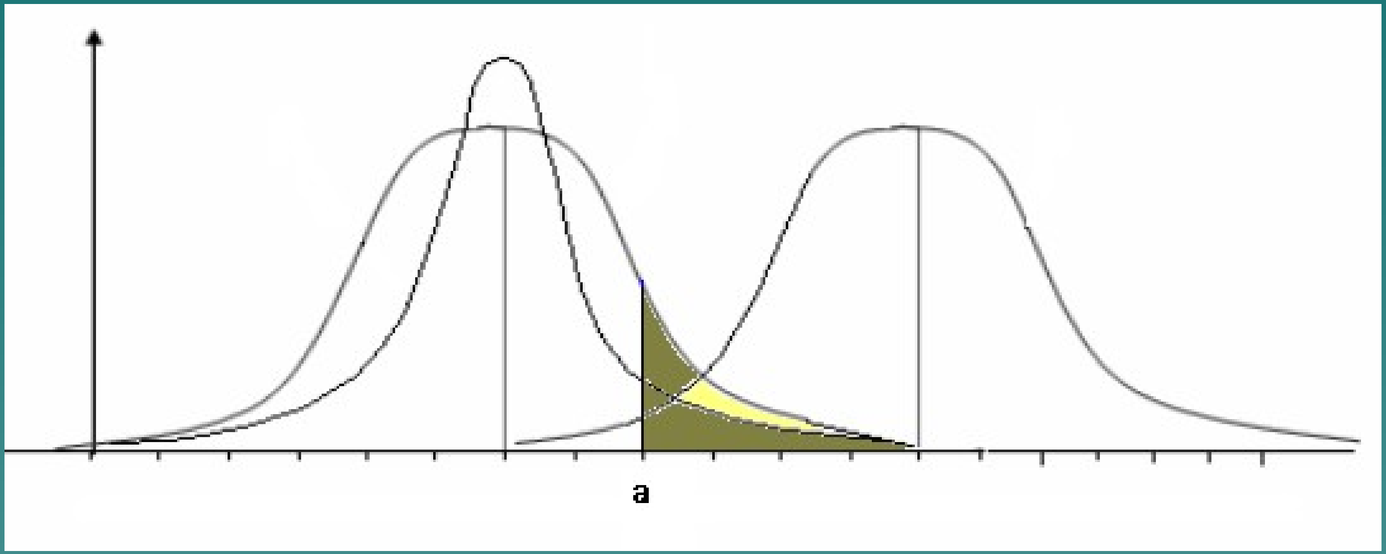
$X_1 \sim N(\mu=8,\ \sigma^2=9)$

$X_2 \sim N(\mu=14, \sigma^2=9)$

$X_3 \sim N(\mu=8,\ \sigma^2=4)$

Normal dağılış gösteren bir populasyondan rasgele alınan bir örnekte X'in belli bir a değerinden büyük olma olasılığını (P(X≥a)=?) hesaplamak için normal dağılış fonksiyonun a'dan sonsuza kadar integrali alınır.

$$P(x \geq a) = \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$



Ancak bulunacak değer her örnek için farklı olacaktır. Çünkü, her örneğin ortalaması ve varyansı farklı olacaktır. Bu durumda dağılışın X ekseni üzerindeki yeri (m) ve dağılışın şekli değişecektir. Dolayısıyla da belli bir a değerinde sonsuza kadar olan bölgenin alanı her örnek için farklı olacaktır. Eğer her örneğe ait dağılışın şekli ve yeri değişmeseydi ilgili bölgenin alanı her zaman aynı bulunacaktı.

Standart Normal Dağılış:

Normal dağılış yoğunluk fonksiyonunda $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ alınır ve

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow \sigma z = x - \mu$$

Her iki tarafın türevi alınırsa

$\sigma dz = dx$ olur.

Böylece standart normal dağılış yoğunluk fonksiyonu

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz \quad , \ -\infty < z < \infty$$

Burada;
$e=2.71826$
$\pi=3.1415$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

dönüşümünden elde edilen z değerlerine standart değişken denir ve ortalaması her zaman sıfır ve varyansı bir'dir. ($Z \sim N_z(o,1)$)

Örnek: X={3,6,4,2,5} değerlerini standartlaştırınız.

Çözüm: Örneğe ait aritmetik ortalama $\bar{x} = 4$
standart sapma ise s=1.58 dir.
Bu durumda z değerleri hesaplandığında
z={-0.633,1.266,0,-1.266,0.633}
olur. Z değerlerinin aritmetik ortalaması $\bar{z} = 0$,
ve standart sapması ise s=1'dir

$$z_1 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{3-4}{1.58} = -0.633 \qquad z_2 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{6-4}{1.58} = 1.266 \qquad z_3 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{4-4}{1.58} = 0$$

$$z_4 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{2-4}{1.58} = -1.266 \qquad z_5 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{5-4}{1.58} = 0.633$$

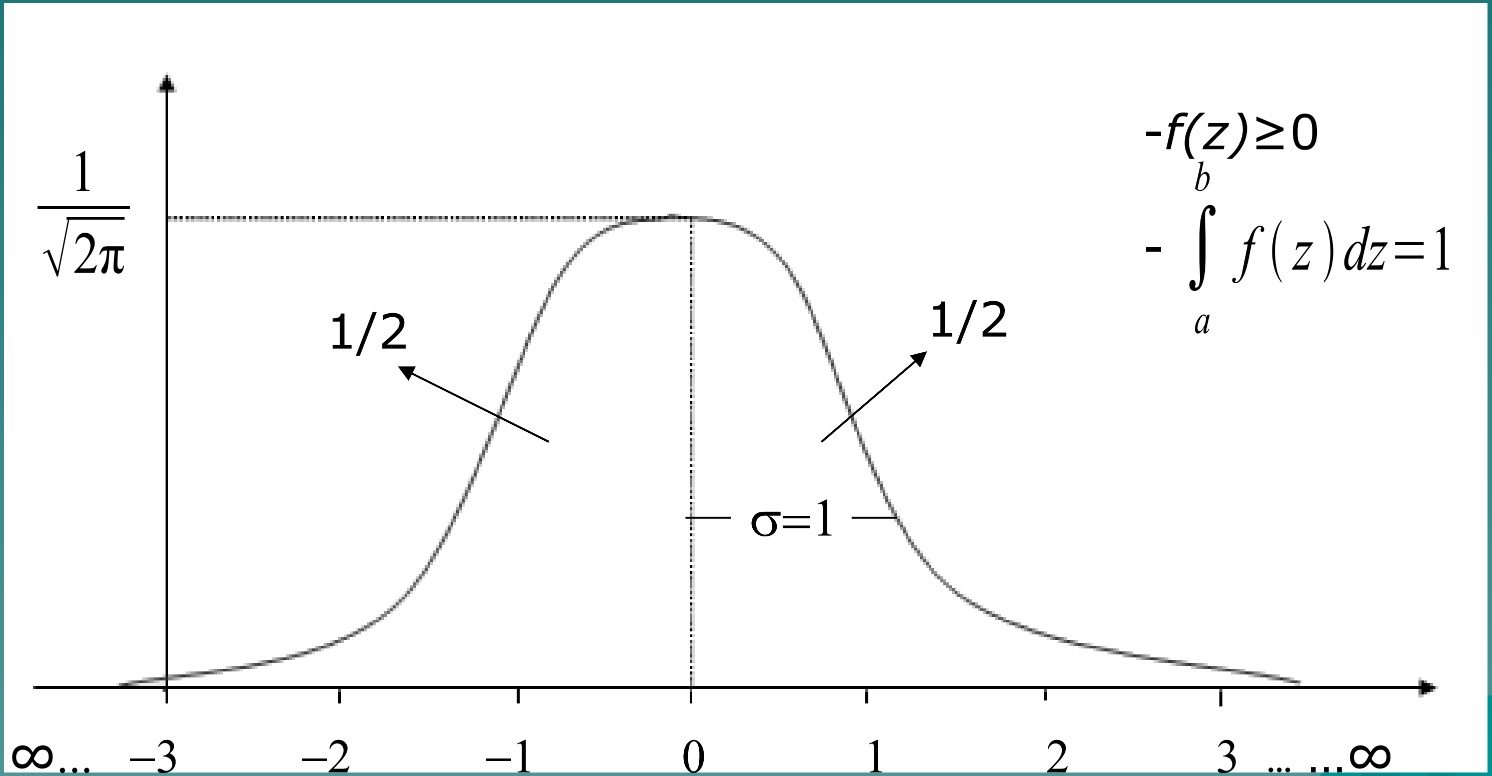
Bu fonksiyonun grafiği çizildiğinde

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z)^2}dz$$

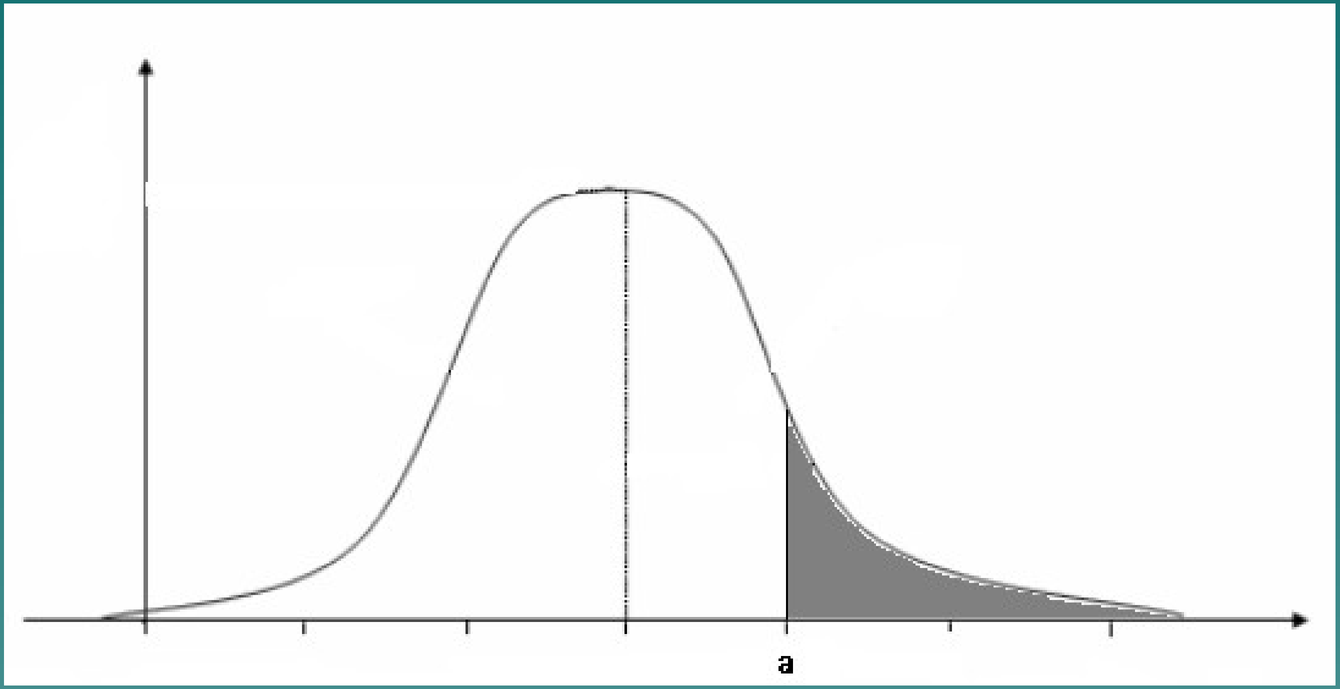
Grafiğin özellikleri

-Çan biçiminde

-μ=0'a göre simetriktir

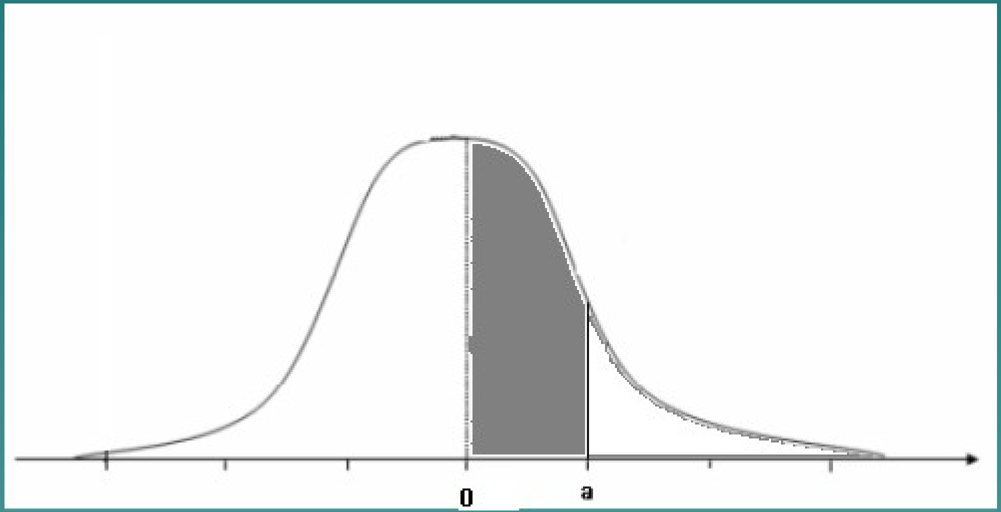


Böylece elde edilen yeni dağılışın (standart normal dağılış) yeri ve şekli daima sabittir. Bu nedenle de z'nin herhangi bir a değerinden büyük değere sahip olma olasılığı (P(Z≥a)) her örnek için aynı olacaktır.



$$P(z \geq a) = \int_a^{\infty} f(z)\,dz = \int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2} dz = \varphi(a)$$

Benzer şekilde Z değişkeninin istenen herhangi bir değerden küçük veya büyük olma veyahut iki değer arasında olma olasılıkları standart normal dağılış fonksiyonunun ilgili değerlere göre tıpkı normal dağılışta olduğu gibi integrali alınarak bulunacaktır. Ancak standart normal dağılışın yeri ve şekli sabit olduğu için Z'nin değişik değerleri için bu integraller bir defa alınırsa bu yeterli olacaktır. Örneğin z'nin sıfır ile herhangi bir a değeri arasında olma olasılığı (P(0<Z<a)) her örnek için aynı olacaktır. Fonksiyonda değişik a değerleri kullanılarak elde edilen integral değerlerinden oluşan tablolara Z cetvelleri veya tabloları denir.



$$P(0<z<a)=\int_{0}^{a} f(z)\,dz=\int_{0}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z)^2}dz=A(a)$$

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Örnek: P(0<Z<1.02)=?

$$P(0<z<1.02)=\int_0^{1.02} f(z)\,dz$$

$$=\int_0^{1.02}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z)^2}dz=A(1.02)$$

$$=0.3461$$

Örnek: P(0<Z<1.96)=?

$$P(0<z<1.96)=\int_0^{1.96} f(z)\,dz$$

$$=\int_0^{1.96}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z)^2}dz=A(1.96)$$

$$=0.4750$$